УДК 621.396.96

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОМЕХ ПЕРВИЧНЫХ РЛС

В. В. Заволокин, Ю. В. Иванов, В. А. Синицын

Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д. Ф. Устинова
АО «ВНИИРА», г. Санкт-Петербург

Получены аналитические выражения математической модели шума квантования аддитивной смеси протяженных пространственных радиолокационных помех и внутриприемного шума радиолокационного приемника. Полученные результаты могут быть полезны при оценке параметров эффективности аппаратуры обработки радиолокационных сигналов первичных радиолокационных станций

Введение. Используя аппарат характеристических функций [1, 2, 3], можно показать, что двумерная плотность распределения вероятности шума квантования аддитивной смеси протяженных пространственных помех (ППП) и внутриприемного шума приемника первичной радиолокационной станции (РЛС) описывается выражением

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=\frac{1}{\Delta^2}\left[1+2\left[\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_1 z_1/\Delta\right)\right)\right]++\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_2^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_2 z_2/\Delta\right)\right)\right]+\right.\right.$$
$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2+2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1 n_2+n_2^2\right)\right]\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1 z_1\right)+\left(n_2 z_2\right)\right)\right)\right]+ \qquad ,\ (1)$$
$$\left.\left.+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2-2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1 n_2+n_2^2\right)\right]\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1 z_1\right)-\left(n_2 z_2\right)\right)\right)\right]\right]\right] \quad , \quad \left|z_1\right|\le\frac{\Delta}{2} \quad , \quad \left|z_2\right|\le\frac{\Delta}{2}$$

где

$$\beta_1 = \Delta^2 / D_{\bar{\eta}} = \Delta^2 / \sigma_{\bar{\eta}}^2 \qquad (2)$$

глубина квантования аддитивной смеси шума приемника и ППП; Δ – шаг квантования; $\sigma_{\bar{\eta}}^2$ – дисперсия координат вектора $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right) = \bar{\xi}\left(y_1, y_2\right) + \vec{ш}\left(u_1, u_2\right)$, порождающего шум квантования, каждая из координат которого есть результат аддитивной смеси шума приемника и ППП; z_1 – первая координата случайного вектора $\bar{\zeta}\left(z_1, z_2\right)$, положение которой на оси наклонной дальности совпадает с положением координаты x_1 вектора $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$, порождающего шум квантования; z_2 – вторая координата случайного вектора $\bar{\zeta}\left(z_1, z_2\right)$, положение которой на оси наклонной дальности совпадает с значением координаты x_2 вектора $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$ порождающего шум квантования; τ – задержка по времени координаты x_2 вектора $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$ относительно координаты x_1 (или координаты z_2 относительно z_1 вектора $\bar{\zeta}\left(z_1, z_2\right)$);

$$\sigma_{\bar{\eta}}^2 = \left(2\sigma_r^2 Mdr + \sigma_ш^2\right) \qquad (3)$$

$\sigma_{\bar{\eta}}^2$ – дисперсия [5] координат x_1 и x_2 случайного вектора $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$, порождающего шум квантования, координаты которого имеют математические ожидания равные нулю; $\sigma_ш^2$ –идисперсия шума приемника; dr – длина (вдоль координаты наклонной дальности) элементарного отражающего слоя ППП; M – количество элементарных отражающих слоев dr, укладывающихся внутри импульсного объема; σ_r^2 – дисперсия (мощность) сигнала отраженного от элементарного отражающего слоя неоднородности протяженностью dr вдоль координаты наклонной дальности;

$$\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)=\frac{2\sigma_r^2 Mdr}{\left(2\sigma_r^2 Mdr+\sigma_{ø}^2\right)}\left(1-\left|\tau\right|/\tau_{è}\right)+\frac{\sigma_{ø}^2}{\left(2\sigma_r^2 Mdr+\sigma_{ø}^2\right)}\delta\left(\tau\right), \qquad (4)$$

$\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)$ – коэффициент корреляции [5] при амплитудно–импульсной модуляции для стационарного случайного процесса ППП, полностью описываемого случайным вектором $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$; $_{xx}$ – подстрочный индекс, означающий корреляцию отсчетов вдоль координаты наклонной дальности $c\tau_u / 2$; $_{\bar{\eta}}$ – подстрочное обозначение, свидетельствующее о принадлежности параметра вектору $\bar{\eta}\left(x_1, x_2\right)$; τ_u – длительность прямоугольного зондирующего монохроматического импульса без внутриимпульсной модуляции.

Математические преобразования. Заменим в выражении (1) нижние пределы суммирования с 1 на минус ∞:

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1,z_2,\tau)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left[\left[-\frac{2\pi^2}{\beta_1}\right]\left(n_1^2+2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1n_2+n_2^2\right)\right]\times\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1z_1+n_2z_2\right)\right)\right),\ |z_1|\le\frac{\Delta}{2},\ |z_2|\le\frac{\Delta}{2}.\quad(5)$$

Интегрируя по одной из переменных (например, по z_2) выражение (1) или (5), несложно получить известное [3] выражение для одномерной плотности распределения вероятности шума квантования аддитивной смеси шума приемника и ППП

$$W_{\bar{\eta}}(z)=\frac{1}{\Delta}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}nz\right)\times\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta_1}n^2\right]\right\}\quad,\qquad |z|\le\frac{\Delta}{2}.\qquad(6)$$

При проведении расчетов с применением аналитических выражений (1) или (5) из-за переполнения разрядной сетки, либо вследствие очень малых значений членов суммы, могут возникнуть проблемы вычислительного характера, приводящие к погрешности при расчете параметров РЛС. Чтобы свести эти погрешности к минимуму, получим иные аналитические интерпретации выражений (1) и (5), описывающие двумерную плотность распределения шума квантования.

Введя в выражении (1) обозначения

$$S_1=\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_1z_1/\Delta\right)\right)\right];$$

$$S_2=\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_2^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_2z_2/\Delta\right)\right)\right],$$

$$S_3=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2+2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1n_2+n_2^2\right)\right]\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1z_1\right)+\left(n_2z_2\right)\right)\right)\right]+$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2-2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1n_2+n_2^2\right)\right]\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1z_1\right)-\left(n_2z_2\right)\right)\right)\right],\quad(7)$$

запишем его следующим образом

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1,z_2,\tau)=\frac{1}{\Delta^2}\left(1+2S_1+2S_2+2S_3\right),\quad |z_1|\le\frac{\Delta}{2},\quad |z_2|\le\frac{\Delta}{2}.\qquad(8)$$

Заметим, что величины S_1 и S_2 могут быть записаны через функцию Якоби 3, которая согласно ее определению выглядит следующим образом

$$\theta_3(x,q)=1+2\sum_{n_1=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nx,\qquad(9)$$

где x – аргумент функции ϑ_3 в общем случае комплексный; q – параметр функции ϑ_3.

С учетом уравнения (9) выражения для функций S_1 и S_2 примут вид

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta_1}\right)\right)-1\right)\qquad S_2=\frac{1}{2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta_1}\right)\right)-1\right).\qquad(10)$$

Запишем выражение для суммы S_3, выразив косинусы, входящие в выражение (7) через комплексные экспоненты

$$S_3 = \frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left\{\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 + 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) + j\left(n_1 z_1 + n_2 z_2\right)\right]\right\} + \right.$$

$$+\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 - 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) + j\left(n_1 z_1 - n_2 z_2\right)\right]\right\} +$$

$$+\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 + 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) - j\left(n_1 z_1 + n_2 z_2\right)\right]\right\} +$$

$$\left. +\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 - 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) - j\left(n_1 z_1 - n_2 z_2\right)\right]\right\}\right\}. \qquad (11)$$

Таким образом, выражение для двумерной плотности распределения вероятности шума квантования, как функции комплексной переменной, после промежуточных преобразований с учетом выражений (10) и (11) примет следующий вид

$$W_{\bar{\zeta}}(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{\Delta^2}\left[1 + \left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta}, \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right) - 1\right) + \left(\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta}, \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right) - 1\right) + \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left\{\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 + 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) + j\left(n_1 z_1 + n_2 z_2\right)\right]\right\}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\left[\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 - 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) + j\left(n_1 z_1 - n_2 z_2\right)\right]\right\} + \left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 + 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)\rho n_1 n_2 + n_2^2\right) - j\left(n_1 z_1 + n_2 z_2\right)\right]\right\}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\left[\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}\left(n_1^2 - 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right) - j\left(n_1 z_1 - n_2 z_2\right)\right]\right\}\right], \qquad |z_1| \le \frac{\Delta}{2}, \quad |z_2| \le \frac{\Delta}{2} \qquad (12)$$

Плотность распределения вероятности может быть записана также следующим образом

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2, \tau) = \frac{1}{\Delta^2}\left[1 + 2\left[\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\right]\left(n_1^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_1 z_1/\Delta\right)\right)\right] + \sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\right]\left(n_2^2\right)\cos\left(\left(2\pi n_2 z_2/\Delta\right)\right)\right] +$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2 + 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right)\right] \times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1 z_1\right) + \left(n_2 z_2\right)\right)\right)\right] +$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\exp\left[-2\pi^2\left[\frac{1}{\beta_1}\right]\left(n_1^2 - 2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1 n_2 + n_2^2\right)\right] \times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta}\left(\left(n_1 z_1\right) - \left(n_2 z_2\right)\right)\right)\right]\Bigg]\Bigg], \; |z_1| \le \frac{\Delta}{2}, \; |z_2| \le \frac{\Delta}{2} \qquad (13)$$

Выражение для двумерной плотности распределения вероятности шума квантования аддитивной смеси шума и ППП можно представить через функции Якоби действительного и мнимого аргумента $\vartheta_3(x, q)$

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1, z_2, \tau) = \frac{1}{\Delta^2}\left\{1 + \left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta}, \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right) - 1\right) + \left(\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta}, \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right) - 1\right) + \right.$$

$$\left. +\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2 + j n_1 z_1\right) - 1\right] \times \left[\theta_3\left(\frac{z_2}{2} + \frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1}{\beta}j, e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right) - \theta_3\left(\frac{z_2}{2}, e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right) - 1\right]\right\}, \; |z_1| \le \frac{\Delta}{2}, \; |z_2| \le \frac{\Delta}{2} \qquad (14)$$

Переходя к пределам суммирования от 1 до ∞, получим выражение

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=$$

$$\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-1\right)+$$
$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z_1\right)\right]\times\left[\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)-1\right]+ \tag{15}$$
$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z_1\right)\right]\times\left[\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)-1\right],\quad \left|z_1\right|\le\frac{\Delta}{2},\ \left|z_2\right|\le\frac{\Delta}{2}$$

После перемножения членов, заключенных в фигурные скобки, получим

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-1+\left\{\left[\sum\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z_1\right)\times\sum_{n_1=1}^{\infty}\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right]-\right.\right.$$
$$\left.-\sum_{n_1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z\right)+\left[\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z\right)\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right]-\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z\right)\right\},\ \left|z_1\right|\le\frac{\Delta}{2},\ \left|z_2\right|\le\frac{\Delta}{2} \tag{16}$$

Приводя подобные члены, получим

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-1+\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z_1\right)\right]\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2\right)\right]\cos\left(n_1z_1\right)+\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z_1\right)\right]\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right\}\right),\ \left|z_1\right|\le\frac{\Delta}{2},\ \left|z_2\right|\le\frac{\Delta}{2}. \tag{17}$$

Преобразуем выражение (15) с использованием функции $\theta_3\left(x,q\right)$

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\left\{\left[\sum_{n_1=\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z_1\right)\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right]-\right.\right.$$
$$-\left[2\sum_{m_1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2\right)\right]\cos\left(n_1z_1\right)+1\right]+\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z_1\right)\right]\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right). \tag{18}$$

Отметим, что выражение во вторых квадратных скобках согласно определению является функцией $\theta_3\left(x,q\right)$

$$W_{\bar{\zeta}}\left(z_1,z_2,\tau\right)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\left\{\left[\sum_{n_1=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z\right)\right]\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\theta_3\left(\frac{z_1}{2},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\sum_{n_1=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z_1\right)\right]\times\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}\left(\tau\right)n_1}{\beta}j,e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right\} \tag{19}$$

Таким образом, получим следующее промежуточное выражение для двумерной плотности распределения вероятности

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1,z_2,\tau)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-\theta_3\left(\frac{z_2}{2},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-\theta_3\left(\frac{z_1}{2},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\right.$$

$$+\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2+jn_1z_1\right]\right\}\theta_3\left(\frac{z_2}{2}+\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1}{\beta}j,\ e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n_1=1}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2-jn_1z_1\right]\right\}\theta_3\left(\frac{z_2}{2}-\frac{2\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1}{\beta}j,\ e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}}\right)\right\}\right). \qquad (20)$$

Представив комплексные множители $\exp(jn_1z_1)$ и $\exp(-jn_1z_1)$, входящие в квадратные скобки, в тригонометрической форме и используя известные соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями, можно записать выражение (19) в виде

$$W_{\bar{\zeta}}(z_1,z_2,\tau)=\frac{1}{\Delta^2}\left(\theta_3\left(\frac{\pi z_1}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)+\theta_3\left(\frac{\pi z_2}{\Delta},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-2\theta_3\left(\frac{z_1}{2},\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}\right)\right)-1-\left\{\left[4\sum_{n_1=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2}\cos(n_1z_2)ch\left(\frac{\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1^2}{\beta}\right)\right]-\right.\right.$$

$$-\left\{\left[4\sum_{n_1=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2}\cos(n_1z_2)ch\left(\frac{\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1^2}{\beta}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-4\sum_{n_1=1}^{\infty}(\sin(n_1z_1))\left[\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2\right)\right]\times\sum_{n_1=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}n_1^2}\sin(n_1z_2)sh\left(\frac{\pi^2\rho_{xx\bar{\eta}}(\tau)n_1^2}{\beta}\right)\right\}. \qquad (21)$$

Сведем в таблицу 1 формулы (1), (5), (12), (13)-(21) различных аналитических интерпретаций.

Таблица 1

Аналитические интерпретации двумерной плотности распределения вероятности шума квантования смеси внтриприемного шума и ППП

Вид аналитической интерпретации	№ формулы
1. Суперпозиция элементарных функций действительного переменного	(1), (5), (13)
2. Суперпозиция основных элементарных функций действительного и комплексного переменного, а также специальных функций действительного переменного	(12)
3. Суперпозиция основных элементарных функций комплексного переменного и специальных (табулированных) функций действительного и комплексного переменного	(14) – (20)
4. Суперпозиция специальных (табулированных) функций действительного переменного	(21)

Все аналитические выражения для двумерной плотности распределения шума квантования для аддитивной смеси шума приемника и ППП, приведенные в таблице 1, справедливы для любого вида модуляции зондирующих импульсных сигналов первичных РЛС.

Выражениями (1), (5), (12), (13) – (21) описывается: двумерная плотность распределения вероятности шума квантования аддитивной смеси шума приемника и ППП.

Плотность распределения вероятности (1) описывает шум квантования на выходе усилителя высокой частоты, так как аналитический вид коэффициента корреляции (4) есть следствие изотропного отражения прямоугольного зондирующего импульса от ППП. Аналого-цифровое преобразование (АЦП) на частоте несущего сигнала технически сложная операция, поскольку требуется тщательная метрологическая сертификация устройства АЦП. Известно также, что на таких высоких частотах существенный вклад будут вносить аппертурные искажения, дифференциальная нелинейность и немонотонность характеристики АЦП, а также уровень внутренних аппаратных помех (схемотехническая электромагнитная совместимость).

Заметим, что по физической и математической сущности представленные варианты относятся к модели, которая не имеют дополнительных алгоритмических составляющих радиолокационного сигнала. Эти составляющие могут быть вызваны эффектами округления и/или усечения разрядной сетки при выполнении арифметических операций в цифровых фильтрах, а также компонент, искажающих радиолокационный сигнал и вызванных явлением Гиббса. Кроме того, при построении цифрового приемника в арифметике с плавающей точкой присутствует также и составляющая шума представления значений цифровых кодов.

Аналитические выражения, приведенные в таблице 1, являются исходными соотношениями, в которые могут быть введены дополнительные, имеющие место на практике, алгоритмические «шумоподобные» составляющие радиолокационного сигнала. Введение этих составляющих определяется исходя из конкретного вида схемотехнического исполнения радиолокационного приемника.

Основные выводы

1 Получены аналитические выражения для двумерной плотности распределения вероятности, полностью описывающее шум квантования при аналого-цифровом преобразовании аддитивной смеси шума приемника и стационарного случайного процесса ППП.

2 Аналитические выражения для плотности распределения вероятности двумерного вектора шума квантования аддитивной смеси шума приемника и ППП являются пригодными для получения соответствующих выражений при любом виде модуляции зондирующих радиолокационных сигналов первичных РЛС.

Полученные аналитические выражения могут быть интерпретированы для произвольного сечения цифрового радиолокационного приемника (тракт высокой частоты, промежуточной частоты, комплексного видеосигнала), а также цифровой обработки радиолокационных сигналов (аппаратура селекции движущихся целей, обнаружения и измерения параметров положения и движения целей).

Библиографический список

1. *Амиантов И. Н., Тихонов В. И.* Воздействие нормальных флуктуаций на типовые нелинейные элементы // Изв. АН СССР. ОТН. 1956.

2. *Тихонов В. И. Амиантов И. Н.* Воздействие сигнала и шума на нелинейные элементы (прямой метод) // Радиотехника и электроника, 1957, т.11, №5.

3. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.

4. *Довиак Р., Зрнич Д.* Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения. Л: Гидрометеоиздат, 1977.

5. *Заволокин В. В., Зубков В. А., Чепель Е. В.* Построение математической модели метеосигналов для когерентно-импульсных РЛС // Вопросы радиоэлектроники, Серия РЛТ, 2008, вып. 2. С.129 – 136.

6. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1980.